**Matematická analýza 2 – 2. "domácí" test (metrické prostory)**

---

Zkuste problémky „z metrických prostorů" promyslet a „sepsat" řešení aspoň několika z nich (vyberte si); a připravte si případné otázky, probereme je pak na cvičení.

**a) metrika:**

1. Ukažte, že z axiomů v definici metriky plyne nezápornost metriky.

2. Uvažujme prostory $R^n$ a v nich metriky:

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \;,\; d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \quad \text{(Euklidovská metrika) a}$$

$$d_{\max}(x,y)=\max_k|x_k-y_k|.$$

Ověřte axiomy metrik $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ i $d_{\max}(x,y)$.

„Rada": trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou metriku v $R^n$ odvoďte z Cauchyovy – Schwarzovy nerovnosti $(a_i, b_i \in R)$

$$(a_1b_1+....+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+....+a_n^2)(b_1^2+....+b_n^2).$$

3. Ověřte opět axiomy metrik $d(f,g)$ a $d_1(f,g)$ v prostoru $C[a,b]$, kde

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \text{ a } d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx.$$

(U ověření axiomů u $d_1(f,g)$ budeme asi potřebovat některé vlastnosti určitého integrálu).

**b) množiny v metrickém prostoru:**

1. Zopakujte si pojmy množina otevřená, uzavřená v $(M,d)$ ( $(M,d)$ - metrický prostor), uzávěr množiny, vnitřní bod, hraniční bod, limitní (hromadný) bod množiny:
   Ukažte:
   a) $X \subset (M,d)$ je uzavřená množina $\Leftrightarrow$ $M - X$ je množina otevřená.
   b) $a \in M$ je limitní bod množiny $X$ $\Leftrightarrow$ pro každou kouli $B(a,r)$, $r>0$, je množina $B(a,r)\cap X$ nekonečná.
   c) $a \in M$ je limitní bod množiny $X$, $a \notin X$ $\Rightarrow$ $a$ je hraničním bodem množiny $X$.
   A ještě
   d) je-li $a$ je hraničním bodem množiny $X$, musí být limitním bodem množiny $X$ ?

2. Rozhodněte, zda platí tvrzení ( buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí ):
   a) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   b) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   c) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   d) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

3. Rozhodněte, zda množina $X=\{[x,y,z]\in R^3;\, x^2+y^2+z^2\le 1 \;\&\; z>x^2+y^2\}$ je uzavřená nebo otevřená. Odůvodněte.

**c) konvergence v metrickém prostoru:**

1. a) Ukažte, že konvergence v prostoru $R^n$ s metrikami $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ i $d_{\max}(x,y)$ je konvergence „po složkách".

   b) Ukažte, že metriky (v prostoru $R^n$) $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ $d_{\max}(x,y)$ jsou ekvivalentní.

2. a) Promyslete, co „znamená" v prostoru $C[a,b]$ (prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$) s metrikou $d_{\max}(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ konvergence posloupnosti $\{f_n\}$.

   ( Platí : $\lim f_n = f$ v $C[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : \lim f_n(x) = f(x)$ ? )

   b) Jak „vypadá" koule v prostoru $(C[a,b], d_{\max})$?

3. Ukažte, že platí:

   Je-li posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in R^n$ cauchyovská v $(R^n, d_1)$ (resp. v $(R^n, d_2)$, resp. v $(R^n, d_\infty)$), pak je konvergentní. (V libovolném metrickém prostoru platí: $\{x_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ je cauchyovská.

4. a) Uveďte definice úplného metrického prostoru a kompaktního metrického prostoru.

   b) Dokažte, nebo ukažte, že neplatí :

   (i) Prostor $(R^n, d_\infty)$ ($n \in N$) je úplný metrický prostor.

   ( Pro $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je $d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$ .)

   (ii) Kompaktní metrický prostor je úplný metrický prostor.